Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
10 класс (Азия)

▷ **1.** Решите уравнение $x^2 - \sqrt{2024 - x} = 2024$. В ответе запишите сумму целых частей найденных решений.

Решение:
Обозначим число 2024 буквой a. Получим уравнение с параметром: $x^2 - \sqrt{a - x} = a$. Перенесём корень в правую часть, параметр a в левую часть и возведём уравнение в квадрат. Полученное уравнение рассмотрим как квадратное относительно a: $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0$.
Его дискриминант $D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 + x) = (2x - 1)^2$, поэтому $a = \frac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$.
Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения: $a = x^2 + x$ или $a = x^2 - x + 1$
Выясним, какие корни этих квадратных (уже относительно x) уравнений нужно включить в ответ, а какие — посторонние. Из начальной записи $x^2 - a = \sqrt{a - x}$, так что $x^2 - a \geqslant 0$. Для первого уравнения имеем $x^2 - a = -x$, следовательно, $x \leqslant 0$; для второго уравнения: $x^2 - a = x - 1$, в этом случае оставляем только корень $x \geqslant 1$. Положим назад $a = 2024$. Для первого уравнения $x^2 + x - 2024 = 0$ отрицательный корень равен $x_1 = -\frac{1+\sqrt{8097}}{2}$, $-46x_1 - 45$. Для второго уравнения в ответ войдёт корень, больший 1: $x_2 = \frac{1+\sqrt{8093}}{2}$, $45 < x_2 < 46$. $x_1 + x_2 = -46 + 45 = -1$.
Ответ: -1.

▷ **2.** Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ - десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырёхзначные числа, для которых выполняется соотношение
$\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2} \cdot \overline{a_3a_4} + 2024$.

Решение:
$\overline{a_1a_2} = x \in [10; 99], \overline{a_3a_4} = y \in [10; 99]$
$100x + y = x \cdot y + 2024$
$(x - 1)y - 100(x - 1) + 1924 = 0$
$(x - 1)(100 - y) = 1924 = 4 \cdot 481 = 4 \cdot 13 \cdot 37$
$9 \leqslant x - 1 \leqslant 98$
$1 \leqslant 100 - y \leqslant 90$
$a \cdot b = 4 \cdot 3 \cdot 37$
$\begin{cases} a = 13 \\ b = 148 \end{cases}$
$\begin{cases} a = 37 \\ b = 52 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 38 \\ y = 48 \end{cases}$
$\begin{cases} a = 26 \\ b = 74 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 27 \\ y = 26 \end{cases}$
$\begin{cases} a = 52 \\ b = 37 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 53 \\ y = 63 \end{cases}$
$\begin{cases} a = 74 \\ b = 26 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 75 \\ y = 74 \end{cases}$
$3848 - 38 \cdot 48 = 2024$
$2726 - 27 \cdot 26 = 2024$
$5363 - 53 \cdot 63 = 2024$
$7574 - 75 \cdot 74 = 2024.$
Ответ: $(3848, 5363, 2726, 7574)$.

▷ **3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2024 отрицательных. Сколько из исходных чисел равны 0?

Решение:
Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных. (x, y —- натуральные числа, $x+y \leq 100$). Так как отрицательное произведение возникает только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных. Имеем $xy = 2024$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $\sqrt{2024} \in (44; 45)$, т. е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа 2024. $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Делителей – $4 \cdot 4 = 16$. Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 44 и 46. Из уравнения $xy = 2024$ находим, что второе число при этом будет равняться 46 или 44 соответственно. Пара (88;23) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 44 отрицательных числа и 46 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 90, а поэтому среди исходных чисел ровно 10 нулевых.
Ответ: 10.

▷ **4.** Последовательность $a_n = n^2 + 1$ отображает множество натуральных чисел N на некоторое множество $M \subset N$. "Правильный робот Вася" из Сколково из подмножества M_1 множества M, содержащего только десятизначные числа, случайным образом выбирает один элемент. Какова вероятность того, что в записи этого элемента встречаются две одинаковые цифры?

Решение:
Квадрат натурального числа при делении на 3 может давать остатки только 0 и 1. Если в десятичном числе n^2+1 все цифры различны, то сумма цифр равна

$1+2+...+9=45$, значит, оно делится на 3. Следовательно, n^2 при делении на 3 дает остаток 2, чего не может быть. Тогда всегда встретятся, по крайней мере две одинокавые цифры.
Ответ: 1.

▷ **5.** Сколько существует троек различных целых чисел, удовлетворяющих условию: квадрат любого из них на 225 меньше произведения двух других чисел?

Решение:

Пусть $a>b>c$ искомые целые числа $\begin{cases} a^2=bc+225 & (1)\\ b^2=ac+225 & (2)\\ c^2=ab+225 & (3)\end{cases}$

$(1)-(2) \Longrightarrow (a-b)(a+b+c)=0 \Longrightarrow a+b+c=0$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$
$3ab+3bc+3ca=-3\cdot 225$
$\begin{cases} ab+bc+ca=-225\\ a+b+c=0\end{cases} \quad ab-(a+b)^2=-225$, $a^2+ab+b^2=2025$
$(a+\frac{b}{2})^2=225-\frac{3}{4}b^2 \Longrightarrow |b|\sqrt{\frac{4\cdot 225}{3}}$; $\left[\frac{4\cdot 225}{3}\right]=51$
$b=-51,-50,...,50,51$
$a=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{2025-\frac{3}{4}b^2}$,
$2025-\frac{3}{4}b^2=$,
$b=0$, $a=\pm 45$, $c=\mp 45$, 2 решения.
В силу симметрии 6 решений:
$(0;45;-45),(0;-45;45),(45;0;-45),(-45;0;45),(45;-45;0),(-45;45;0)$.
Покажем, что уравнение $2025-\frac{3}{4}b^2=h^2$ решений, кроме $b=0$, не имеет. Пусть
$b=2b_1$ $2025=3b_1^2+h^2$, $2025\vdots 3 \Longrightarrow h^2\vdots 3$, $h=3h_1$
$675=3b_1^2+3h_1^2$, $675\vdots 3 \Longrightarrow b_1^2\vdots 3$, $b_1=3b_2$
$225=3b_2^2+3h_1^2$, $225\vdots 3 \Longrightarrow h_1^2\vdots 3$, $h_1=3h_2$
$75=3b_2^2+3h_2^2$, $75\vdots 3 \Longrightarrow b_2^2\vdots 3$, $b_2=3b_2$
$25=3b_3^2+3h_2^2$, решений нет.

▷ **6.** Вычислите $\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Решение:
Решим задачу в общем случае: $A=\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}$
$k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$, $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$
Введем следующие обозначения: $a_k=k^2+k+1$, $b_k=k^2-k+1$
Нетрудно показать, что $a_k=b_{k+1}$
В этом случае $S=\frac{(2-1)(2^2+2+1)\cdot(3-1)(3^2+3+1)...(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)\cdot(3+1)(3^2-3+1)...(n+1)(n^2-n+1)}=\frac{1\cdot a_2\cdot 2\cdot a_3\cdot...(n-1)\cdot a_n}{3\cdot b_2\cdot 4\cdot b_3\cdot...(n+1)\cdot b_n}=\frac{2\cdot a_n}{b_2\cdot n(n+1)}=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{n^2+n})=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{100^2+100})=\frac{3367}{5050}$.
Ответ: $\frac{3367}{5050}$.

▷ **7.** Какие последние четыре цифры содержатся в записи числа 5^{2024}?

Решение:
Рассмотрим несколько степеней пятерки
$5,25,125,\underbrace{625,3125,..5625,..8125}_{4},\underbrace{..0625,..3125,..5625,..8125}_{4}$
$2024-3=2021=4\cdot 505+1$.
Ответ: 0625.

▷ **8.** Запись положительного числа, кратного трем, состоит только из цифр 4 и 5. Сумма всех его цифр делится на 7. Найдите наименьшее такое число.

Решение:
Пусть число записано из k четверок и n пятерок. Тогда по условию задачи $4k+5n$ делится на 21, а это возможно только тогда, когда $n=s$ и $k=4s$. При $s=1$, получаем решение.
Ответ: 44 445.

▷ **9.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a,b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $20a-24b$.

Решение:
Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично теперь мы можем использовать операцию $+$ с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.
Теперь легко выписать искомое выражение
$((...\underbrace{(a+a)+...+}_{+19}a)+(-((...\underbrace{(b+b)+...+}_{+23}b))$.

▷ **10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел

m, n, k таких, что $m^3 + n^3 + k^3 = 1679616$.

Решение:
$S(1679616) = 1 + 6 + 7 + 9 + 6 + 1 + 6 = 36$

$N \vdots 9$, $N \vdots 4 \Rightarrow N \vdots 36$
$N = 36 * 46656 = 36^2 * 1296 = 36^4$
$m^3 + n^3 + k^3 = 36^4$
$m = a * 36$, $n = b * 36$, $k = c * 36$
$a^3 + b^3 + c^3 = 36$
$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$
Ответ: (36,72,108).